2016

Examen corrigé
Échantillonnage & Estimation

2008-2009 | EG3

Professeur : M.

Corrigé disponible sur www.mafacdeco.com et www.koulyati.com
Hafsa El Khalouki
23/11/2016

Contrôle Final
2008 – 2009

Exo 1 : Voir TD N° 4

Exo 2 : Voir TD N° 3 ou (Vidéo sur youtube ⇓ Koulyati)

Exo 3 : 1

a)

si $X \sim N(m, \sigma)$

alors $T \sim NCR(0, 1)$ avec $T = \frac{X-m}{\sigma}$

on a : $P(14,7 < X < 15,3)$

$= P\left(\frac{14,7-15}{0,2} < \frac{X-m}{\sigma} < \frac{15,3-15}{0,2}\right)$

$= P(-1,5 < X < 1,5)$

on sait que : $2\Pi(t) - 1 = 1-\alpha$

donc : $2\Pi(1,5) - 1 = 2 \times (0,9332) - 1$

$= 0,8664$

le rejet $\Rightarrow$ $1 - 0,8664 = 0,1336$

4

c) l'estimation ponctuel de p :

$$f = \frac{355}{500} = 0,71$$

d)

on a : $f = 0,71$; $\alpha = 0,95$; $n = 500$

Alors :

$$IC = \left[f - t_\alpha \times \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \; ; \; f + t_\alpha \times \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right]$$

on a :

$$2\Pi(t_\alpha) - 1 = 0,95$$

$$t_\alpha = 1,96 \quad \text{(table NCR)}$$

$$IC = \left[0,71 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,71 \times 0,29}{500}} \; ; \; 0,71 + 1,96 \times \cdots \right]$$

$$IC = [\, 0,6702 \; ; \; 0,7497 \,]$$

e) l'amplitude de IC :

$$2\, t_\alpha \times \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} = 0,05$$

$$2 \times t_\alpha \times \frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}} = 0,05$$

$$\sqrt{n} = \frac{2 \times 1,96 \times \sqrt{0,71 \times 0,29}}{0,05}$$

$$n = 1266$$

5

f)

on a :

$H_0 : p = p_0 = 0,7$

$H_1 : p > p_0$

- puisque $H_1 : p > p_0$

Alors : il s'agit d'un test unilatéral à gauche avec :

$$I_{acc} = \left] -\infty ; p_0 + t_{1-\alpha} \times \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right]$$

avec $t_{1-\alpha} = 1,96$

donc : $I_{acc} = \left] -\infty ; 0,7 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,7 \times 0,3}{500}} \right]$

$I_{acc} =] -\infty ; 0,7401]$

on a : $f = 0,71 \in I_{acc}$ donc on accepte H_0

g)

on a : $n = 16$; $\sigma_e = 5$

$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 6$

$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

Puisque $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

Alors il s'agit d'un test bilatéral

$$I_{acc} = \left[\frac{\sigma_0^2}{n} \chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}} ; \frac{\sigma_0^2}{n} \chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

on cherche a $\chi^2_{\alpha/2}$ et $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$\frac{\alpha}{2} = \frac{0,2}{2} = 0,10$

$\chi^2_{\alpha/2} = 8,55$ (table de KHi 2)

$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} = 22,3$

$I_{acc} = [3,2062 ; 8,3625]$

puisque $\sigma_e^2 = 5 \in I_{acc}$ on accepte H_0

Bon courage

ISSAM

$= p^{\sum x_i} \cdot (1-p)^{\sum(1-x_i)} = p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i}$ ③

avec : $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$

$\log L(x_1 \ldots x_n, p) = \log\left(p^{\sum x_i} \cdot (1-p)^{n-\sum x_i}\right)$

$= \log(p^{\sum x_i}) + \log((1-p)^{n-\sum x_i})$

$= \sum_1^n x_i \log(p) + (n - \sum x_i)\log(1-p)$

$$\frac{\partial \log(L(x_1 \ldots x_n, p))}{\partial p} = \sum x_i \times \frac{1}{p} + n - \sum x_i \times \frac{-1}{1-p}$$

avec $(\log(p))' = \frac{p'}{p} = \frac{1}{p}$

Alors : $\frac{\sum x_i}{p} - \frac{n-\sum x_i}{1-p} = 0$

$\Rightarrow \frac{\sum x_i}{p} = \frac{n - \sum x_i}{1-p} \Rightarrow \frac{1-p}{p} = \frac{n-\sum x_i}{\sum x_i}$

$\Rightarrow \frac{1}{p} - \frac{p}{p} = \frac{n}{\sum x_i} - \frac{\sum x_i}{\sum x_i}$

donc : $p = \frac{\sum x_i}{n} = \hat{p} = \bar{X}$

b) Montrer que cet estimateur est convergent :

on a : $V(\bar{x}) = V\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_1^n V(x_i)$

$V(\bar{x}) = \frac{1}{n^2} \times n \times p \times q = \frac{p \times q}{n}$

donc :

$\lim_{n \to \infty} V(\bar{x}) = \lim_{n\to\infty} \frac{p \times q}{n} = \frac{p \times q}{+\infty} = 0$

$\underline{p}$ est convergent

②

b) on a :

$$p(m - k < \bar{X} < m + k) = 0,95$$

avec :

$$2\Pi(t) - 1 = 0,95 \; ; \; \Pi(t) = \frac{1,95}{2}$$

$$t = 1,96$$

$$K = t \times \sigma = 1,96 \times 0,2$$

$$K = 0,392$$

⇒ La longueur de la précision de la pièce fabriquée que peut-on garantir est de 0,392 cm

EX 04

a) l'estimation ponctuel du maximum vraisemblance de p :

on a : $X \rightsquigarrow B(p)$

Alors :

$$p(X = x_i) = p^{x}(1-p)^{1-x_i}$$

$$L(x_1 \ldots\ldots x_m, p) = p(x_1, p) \ldots\ldots p(x_m, p)$$

$$L(x_1 \ldots\ldots x_m, p) = \prod_{i=1}^{m} p^{x}(1-p)^{1-x_i}$$

$$= (p^{x_1} \cdot p^{x_2} \ldots\ldots p^{x_m})((1-p)^{1-x_1} \ldots (1-p)^{1-x_m})$$